Einstein 方程式の適切な離散式の構築について

土屋拓也[1]

[1] 早稲田大学

導入

Einstein 方程式と数値計算

- 2016 年 2 月にアメリカの重力波観測装置 LIGO において重力波の直接観測が成功した.
- この直接観測の成功により, 重力波によってもたらされる宇宙からの情報を解析することが可能となり, 未だわかっていない宇宙現象の解明の可能性が出てきた.
- 今回の重力波の観測には, Einstein 方程式の数値計算 (数値相対論) により波形予測が行われた.
- そのため, 重力波の研究においてさらなる高精度な数値結果が求められる.

高精度な数値計算

- 数値計算において, 離散化の手法は方程式に依存することが知られている.
- 離散化手法は普通似た性質のもつ方程式でよく用いられる手法を "借りて" 使うことが一般的である.
- しかし, 用いる離散化手法が適切でない場合, その離散化誤差が計算とともに蓄積され数値計算の結果が不適切なものになる.
- 特に非線形現象における発展方程式の解析において, 数値計算は主な手法となることが多いが, その離散化手法は最適でない場合が存在する.
- 物理現象を記述する方程式では, Lagrange 関数や Hamilton 関数が存在している場合が多く, その構造を保ったまま数値計算を行う方法が開発されている (シンプレクティック数値積分法).

高精度な数値計算結果を得るために, Einstein 方程式に "離散変分法" を用いた構造保存数値スキームの適用を考える.

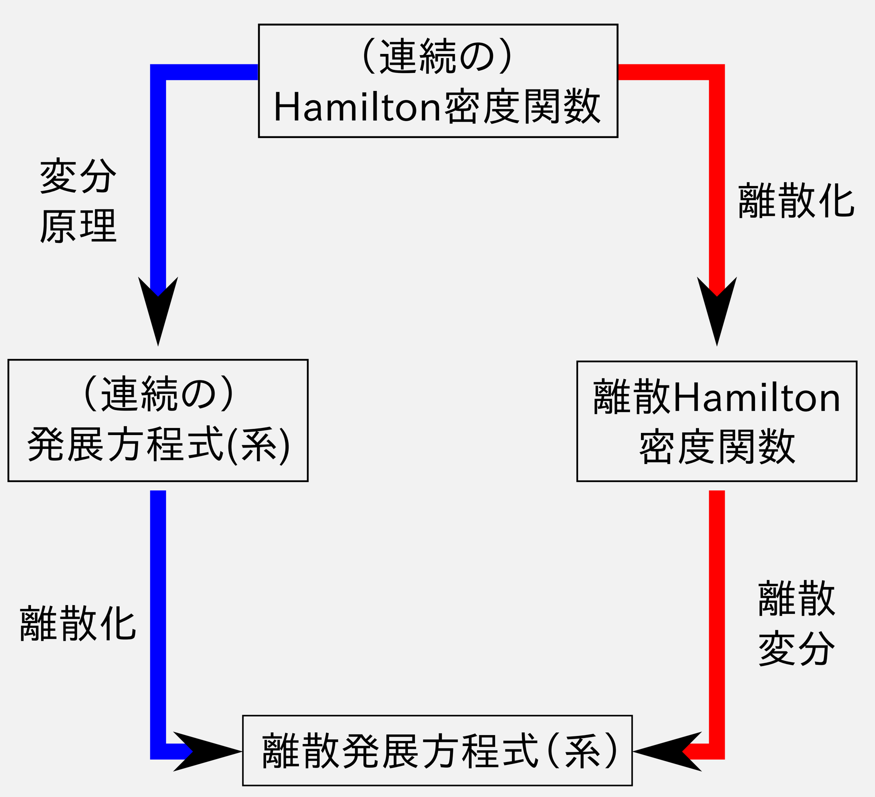
手法

一般ケース

- (連続の)Hamilton 密度関数を与える.
- 変分原理から (連続の) 発展方程式を作る.
- 発展方程式を離散化し, 離散発展方程式を得る.
- 離散化手法が適切かどうかは発展方程式に依存 (適切でないことも).

離散変分法ケース

- (連続の)Hamilton 密度関数を与える.
- Hamilton 密度関数を離散化する.
- 離散 Hamilton 密度関数から離散変分により離散発展方程式を得る.
- 離散 Hamilton 密度関数に特化した適切な離散化された発展方程式が得られる.



Einstein 方程式

- Einstein 方程式:

$$
{}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}{}^{(4)}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1}
$$

の Lagrange 密度関数は真空中 ($T_{\mu\nu} = 0$) では以下のように表せる.

$$
\mathcal{L}^{\mathrm{GR}} = \tilde{\alpha}\left\{ {}^{(3)}\tilde{R} + \tilde{\gamma}^{ij}(\partial_i \tilde{\Gamma}^m{}_{mj}) - \tilde{\Gamma}^m{}_{mi}\tilde{\gamma}^{ab}\tilde{\Gamma}^i{}_{ab} - \frac{1}{8}\tilde{\Gamma}^m{}_{mi}\tilde{\Gamma}^n{}_{nj}\tilde{\gamma}^{ij} - \tilde{\pi}^2 + \tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_{ij} \right\}. \tag{2}
$$

- Legendre 変換による Hamilton 密度関数 ($\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}} \equiv \tilde{\pi}^{ij}(\partial_t\tilde{\gamma}_{ij}) - \mathcal{L}^{\mathrm{GR}}$) によって,

$$
\boxed{\text{発展方程式}} : \begin{cases} \partial_t\tilde{\gamma}_{ij} = \dfrac{\delta\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta\tilde{\pi}^{ij}}, \\ \partial_t\tilde{\pi}^{ij} = -\dfrac{\delta\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta\tilde{\gamma}_{ij}}, \end{cases} \quad \boxed{\text{拘束条件}} : \begin{cases} 0 = -\dfrac{\delta\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta\tilde{\alpha}}, \\ 0 = -\dfrac{\delta\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta\tilde{\beta}^i}. \end{cases} \tag{3}
$$

- 今回は t のみを変数として扱うことにする. このとき,

$$
\partial_t\tilde{\gamma}_{ij} + 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_{ij}, \quad \partial_t\tilde{\pi}^{ij} = 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}^{mi}\tilde{\pi}_m{}^j, \tag{4}
$$

となる. 拘束条件は

$$
\tilde{\mathcal{H}} \equiv -\frac{\delta\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta\tilde{\alpha}} = \tilde{\pi}^2 - \tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_{ij} = 0, \quad \tilde{\mathcal{M}}_i \equiv -\frac{\delta\tilde{\mathcal{H}}^{\mathrm{GR}}}{\delta\tilde{\beta}^i} = 0. \tag{5}
$$

- $\tilde{\mathcal{H}}$ の時間発展式は

$$
\begin{aligned}
\partial_t\tilde{\mathcal{H}} &= 2\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij}(\partial_t\tilde{\gamma}_{ij}) + 2\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{ij}(\partial_t\tilde{\pi}^{ij}) - 2\tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_i{}^m(\partial_t\tilde{\gamma}_{jm}) - 2\tilde{\pi}_{ij}(\partial_t\tilde{\pi}^{ij}) \\
&= 2\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij}(-2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{ij} + 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_{ij}) + 2\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{ij}\left(2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_m{}^i\tilde{\pi}^{mj}\right) \\
&\quad - 2\tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}_i{}^m(-2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\gamma}_{jm} + 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_{jm}) - 2\tilde{\pi}_{ij}\left(2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}\tilde{\pi}^{ij} - 2\tilde{\alpha}\tilde{\pi}_m{}^i\tilde{\pi}^{mj}\right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{6}
$$

であり, $\partial_t\tilde{\mathcal{M}}_i$ も恒等的に 0 となる.

- Einstein 方程式はその方程式の構造上, 拘束条件は時間発展後も変化しないことが保障される構造を有している.

離散方程式

Crank-Nicolson による離散化

一般的な離散化手法の例として, Crank-Nicolson を用いると離散方程式は以下のようになる:

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} = &-\frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)})(\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}) \\
&+\frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n)})(\tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n)}),
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\pi}^{ij(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij(n)}}{\Delta t} = &\frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)})(\tilde{\pi}^{ij(n+1)} + \tilde{\pi}^{ij(n)}) \\
&- \frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mi(n+1)} + \tilde{\pi}^{mi(n)})(\tilde{\pi}^{nj(n+1)} + \tilde{\pi}^{nj(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}).
\end{aligned} \tag{8}
$$

離散拘束条件の時間発展は,

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{H}}^{(n+1)} - \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}}{\Delta t} = &-\frac{1}{8}(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})(\tilde{\pi}^{(n+1)} - \tilde{\pi}^{(n)}) \\
&\cdot (\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}) \\
&+\frac{1}{8}(\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})(\tilde{\pi}^i{}_n{}^{(n+1)} - \tilde{\pi}^i{}_n{}^{(n)})(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)}) \\
&\cdot (\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n)}) \\
&+\frac{1}{8}(\tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n)})(\tilde{\pi}^\ell{}_i{}^{(n+1)} - \tilde{\pi}^\ell{}_i{}^{(n)})(\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)}) \\
&\cdot (\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{mn}{}^{(n)}) \\
&-\frac{1}{8}(\tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n)})(\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)}\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n+1)} - \tilde{\pi}^{\ell j(n)}\tilde{\gamma}_{mi}{}^{(n)}) \\
&\cdot (\tilde{\alpha}^{(n+1)} + \tilde{\alpha}^{(n)})(\tilde{\pi}^{mn(n+1)} + \tilde{\pi}^{mn(n)})(\tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n+1)} + \tilde{\gamma}_{nj}{}^{(n)}),
\end{aligned} \tag{9}
$$

となり, これは恒等的には 0 にならない.

離散変分法による離散化

離散方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\gamma}_{ij}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} = &-\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)} + \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^\ell{}_i{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^\ell{}_i{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{j\ell}{}^{(n)} \\
&+ \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^\ell{}_j{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^\ell{}_j{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)},
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\pi}^{ij(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij(n)}}{\Delta t} = &\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)} - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)} \\
&- \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^{(n+1)}(\tilde{\pi}^j{}_\ell{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^j{}_\ell{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell i(n+1)}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

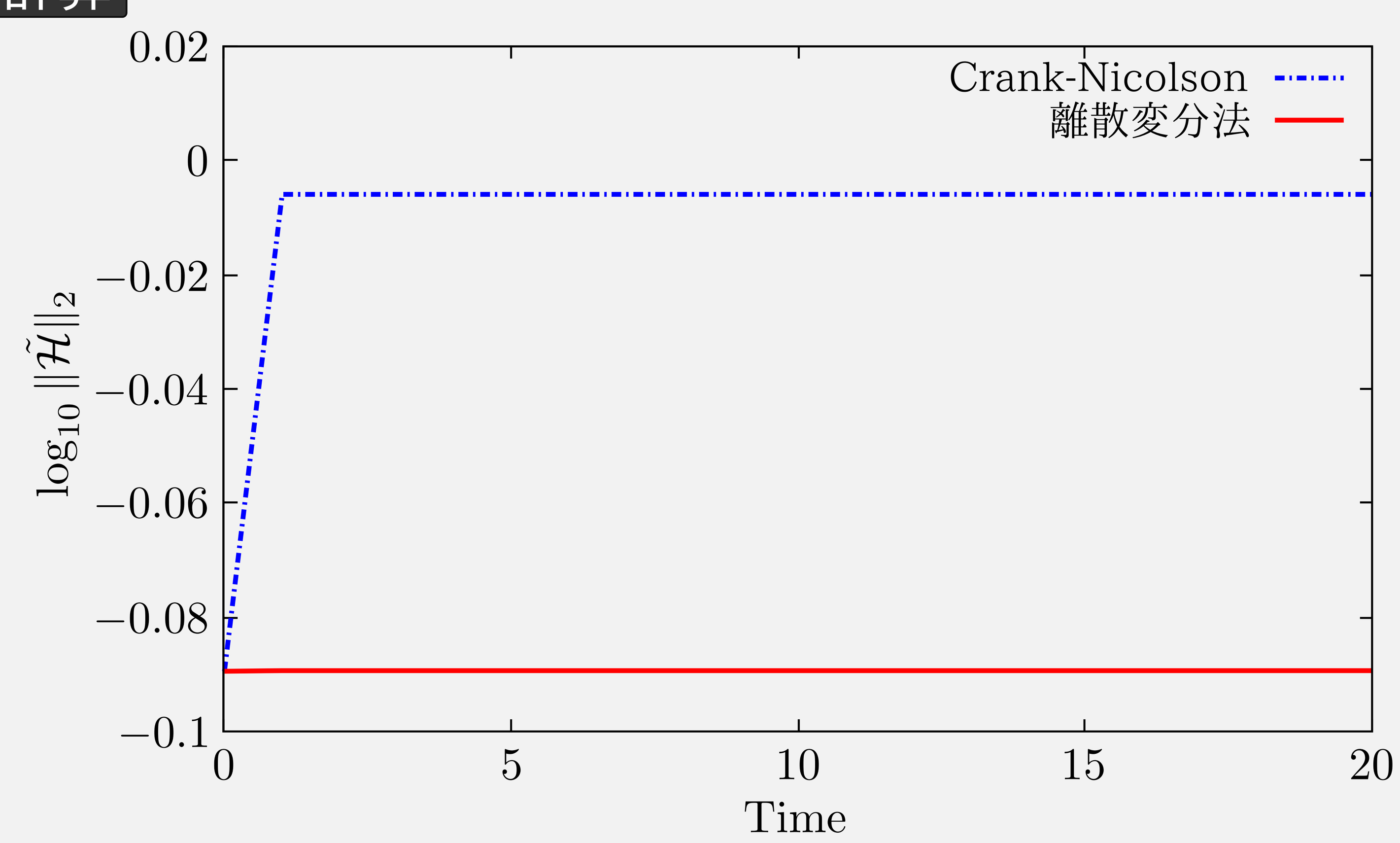
離散拘束条件の時間発展は

$$
\begin{aligned}
\frac{\tilde{\mathcal{H}}^{(n+1)} - \tilde{\mathcal{H}}^{(n)}}{\Delta t} = &(\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\pi}^{ij(n+1)}\frac{\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} + (\tilde{\pi}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^{(n)})\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}\frac{\tilde{\pi}^{ij(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij(n)}}{\Delta t} \\
&- (\tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^i{}_\ell{}^{(n)})\tilde{\pi}^{\ell j(n+1)}\frac{\tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n+1)} - \tilde{\gamma}_{ij}{}^{(n)}}{\Delta t} \\
&- (\tilde{\pi}^\ell{}_j{}^{(n+1)} + \tilde{\pi}^\ell{}_j{}^{(n)})\tilde{\gamma}_{i\ell}{}^{(n)}\frac{\tilde{\pi}^{ij(n+1)} - \tilde{\pi}^{ij(n)}}{\Delta t} = 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

となり, 恒等的に 0 となる.

離散変分法による離散方程式は, 連続の場合と同様に拘束条件が時間発展後も変化しないことが保障される構造を有している.

数値計算



- 初期値には Einstein 方程式の厳密解に摂動を入れて計算した.
- 横軸は時間, 縦軸は数値誤差を表す.
- 離散変分法の結果 (赤線) は水平で時間発展による変化がない.
- 一方で, Crank-Nicolson の結果 (青線) は計算開始後増加し破れが大きくなってしまっている.
- Einstein 方程式においても, 離散変分法が有効な離散化手法であることが示せた.

まとめと展望

- Crank-Nicolson スキームのような汎用的離散化手法では, 連続における方程式の構造が離散化の際に失われてしまうことがある.
- 離散変分法のような方程式に特化された離散化手法では, 連続における方程式の構造を離散方程式においても保つことができる.
- 離散方程式で満たされる拘束条件を保存する性質は, 数値計算において確認された.
- 離散化の際に, 拘束条件の時間発展式が連続の場合と同様になるように離散方程式を構築すれば, 数値計算は安定する.
- ロボットなどの拘束条件が多い運動の数値解析では, その拘束条件の時間発展の離散式が連続のときの性質を保っていれば, 安定に数値計算が行えることが期待される.

数学・数理科学専攻若手研究者のための異分野・異業種研究交流会 2016@ 明治大学